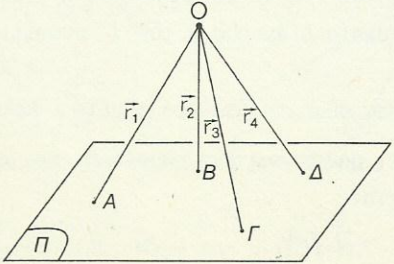
36. α) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{r}_1$, $\vec{OB}=\vec{r}_2$, $\vec{O\Gamma}=\vec{r}_3$, $\vec{O\Delta}=\vec{r}_4$. Αν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in R$, όχι συγχρόνως μηδέν, να δειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνεπίπεδα, αν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3+\lambda_4\vec{r}_4=\vec{0} \quad (1) \quad \text{και} \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \quad (2)$$

β) Αν τα προηγούμενα διανύσματα είναι ανά τρία μη συνεπίπεδα και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνεπίπεδα και ισχύει η (1), να δειχθεί ότι ισχύει η (2).

Απόδειξη:



α) Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (1) και (2). Θα δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνεπίπεδα.

Έστω $\lambda_1 \neq 0$, τότε $\lambda_4=-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3$.

Η (1) γράφεται: $\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\vec{r}_4=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1(\vec{r}_1-\vec{r}_4)+\lambda_2(\vec{r}_2-\vec{r}_4)+$ $+\lambda_3(\vec{r}_3-\vec{r}_4)=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1\vec{\Delta A}+\lambda_2\vec{\Delta B}+\lambda_3\vec{\Delta\Gamma}=\vec{0}$ (3).

Η (3), επειδή $\lambda_1\neq 0$, σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta A}$, $\vec{\Delta B}$, $\vec{\Delta\Gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άρα είναι συνεπίπεδα. Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ,Δ είναι συνεπίπεδα.

β) Τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι συνεπίπεδα (εφόσον τα σημεία Α,Β, Γ, Δ είναι συνεπίπεδα). Επομένως: $\vec{AB}=\lambda\vec{B\Gamma}+\mu\vec{\Gamma\Delta}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{r}_2-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_3-\vec{r}_2)+\mu(\vec{r}_4-\vec{r}_3) \Rightarrow \vec{r}_1=\vec{r}_2+\lambda(\vec{r}_2-\vec{r}_3)+\mu(\vec{r}_3-\vec{r}_4)$$

και η (1) γράφεται:

$$(\lambda_1+\lambda\lambda_1+\lambda_2)\vec{r}_2+(-\lambda\lambda_1+\lambda_1\mu+\lambda_3)\vec{r}_3+(-\lambda_1\mu+\lambda_4)\vec{r}_4=\vec{0}$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, $\vec{r}_4$ δεν είναι συνεπίπεδα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Θα είναι:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda\lambda_1+\lambda_2=0 & (4) \\ -\lambda\lambda_1+\lambda_1\mu+\lambda_3=0 & (5) \\ -\lambda_1\mu+\lambda_4=0 & (6) \end{cases}$$

Οι (4) και (6) δίνουν $\lambda=-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu=\dfrac{\lambda_4}{\lambda_1}$, οπότε η (5) γίνεται:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$

37. α) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{6}$ και $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, να βρεθούν τα μέτρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$.

β) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=3$, να βρεθούν τα μέτρα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$.

γ) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$, να δειχθεί ότι $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=15$.

Απόδειξη:

α) Είναι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$

$$=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=2^2+1^2+2\cdot2\cdot1\,\frac{\sqrt{3}}{2}=5+2\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$$

Έχουμε: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$

$$=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\,\frac{\sqrt{3}}{2}=5-2\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

Είναι: $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$

$$=|\vec{\alpha}|^2+4|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=2^2+4\cdot1^2+4\cdot2\cdot1\,\frac{\sqrt{3}}{2}=4+4+4\sqrt{3}=4(2+\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

β) Επειδή $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) \Rightarrow (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}^2-4\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow \vec{\alpha}^2=4\vec{\beta}^2 \quad (1)$$

Είναι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=3^2 \Rightarrow (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=9 \Rightarrow \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=9 \Rightarrow \vec{\alpha}^2=9-\vec{\beta}^2$ (2)

Οι (1) και (2) δίνουν $4\vec{\beta}^2=9-\vec{\beta}^2 \Rightarrow 5\vec{\beta}^2=9 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2=\frac{9}{5} \Rightarrow |\vec{\beta}|=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Για $|\vec{\beta}|^2=\frac{9}{5}$. Η (1) δίνει $\vec{\alpha}^2=4\frac{9}{5} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2=\frac{36}{5} \Rightarrow |\vec{\alpha}|=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

γ) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\text{συν}\frac{\pi}{3}=3\cdot 4\frac{1}{2}=6$. Έχουμε:

$$(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=$$
$$=3|\vec{\alpha}|^2-6-9\cdot 6+3|\vec{\beta}|^2=3\cdot 3^2-6-54+3\cdot 4^2=27-6-54+48=75-60=15$$

38. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

α) Να δειχθεί ότι το μέτρο του διανύσματος $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι 1.

β) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι συγγραμμικό προς την διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

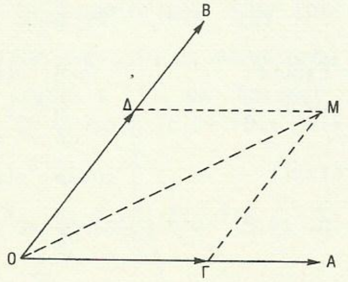
γ) Αν $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2)$, να βρεθεί ένα διάνυσμα που να έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Απόδειξη:

α) Είναι: $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha} \Rightarrow \left|\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right|=\left|\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}|\vec{\alpha}|=1$

β) Είναι $\left|\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right|=1$. Επειδή $\dfrac{1}{|\vec{\beta}|}>0$ και $\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}$ το διάνυσμα $\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$. Όμοια δείχνεται ότι και το διάνυσμα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$.

Άρα τα διανύσματα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$, $\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι ομόρροπα προς τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, αντίστοιχα. Θεωρούμε το σημείο O και τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$. Επειδή τα διανύσματα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$, $\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι ομόρροπα προς τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ θα υπάρχουν σημεία Γ και Δ στις ημιευθείες OA και OB, τέτοια ώστε $\vec{O\Gamma}=\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ και $\vec{O\Delta}=\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ και θα είναι $|\vec{O\Gamma}|=|\vec{O\Delta}|$. Είναι: $\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}=\vec{OM} \Rightarrow \vec{OM}=$ $=\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$. Το παραλληλόγραμμο ΟΔΜΓ



είναι ρόμβος, διότι $|\vec{O\Gamma}|=|\vec{O\Delta}|$. Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα OM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$.

γ) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ έχει όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

'Εχουμε $\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j})$, $\dfrac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j})$. Επομένως είναι: $\vec{\delta}=\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j})+\dfrac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j})=$

$$=\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}+\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\right)\vec{i}+\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}+\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\right)\vec{j}$$

39. Θεωρούμε τα μη συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$. Υποθέτουμε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$ και ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

α) Να βρεθεί το μέτρο $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$.

β) Να δειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha}+\vec{\beta}})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απόδειξη:

α) 'Εχουμε: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=$

$$=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+|\vec{\gamma}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} \quad (1)$$

Είναι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0$, $\vec{\gamma}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 1\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$. 'Ετσι η (1) δίνει:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|^2=1+1+1+2\frac{1}{2}+2\cdot 0+2\cdot 0=4 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=2$$

β) Είναι $\quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha}+\vec{\beta}})=\dfrac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\,|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|} \quad (2)$

Αλλά: $\quad (\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=1+1+2\frac{1}{2}+0+0=3$

και $\quad |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1+1+2\frac{1}{2}=3 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{3}$

'Αρα η (2) δίνει: $\quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha}+\vec{\beta}})=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$